

КАСЫМОВ АЙДЫН АДИЛОВИЧ

ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ
НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА
ОДНОРОДНЫХ ГРУППАХ ЛИ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности «6D060100-Математика»

Актуальность темы исследования. Первыми математиками, которые изучали субэллиптический анализ в группе Гейзенберга, были Фолланд и Стейн, которые последовательно создавали обобщение анализа для более общих стратифицированных групп. Также можно отметить, что Ротшильд и Стейн обобщили эти результаты для общих векторных полей, удовлетворяющих условию Хормандера. Можно сказать, что эти результаты были опубликованы в знаменитой книге Фолланда и Стейна, в которой заложен анизотропный анализ. И стоит отметить, что однородная группа Ли нильпотентна.

История дробного исчисления берет свое начало в работах Римана и Лиувилля. И в этих работах понятия дробного интеграла были введены впервые. Наряду с целочисленными производными была введена концепция дробной производной, которая была названа в честь Римана и Лиувилля. Затем Адамар в своих работах ввел другое определение дробной производной. Также стоит отметить, что Капуто также ввел определение дробной производной, которая в конкретном случае может быть равна производной Римана-Лиувилля. Эти операторы являются нелокальными операторами. Обратите внимание, что эти дробные производные являются одномерными операторами. Для многомерного случая понятие многомерного дробного лапласиана вводится через символ лапласиана. Стоит отметить, что дробное исчисление в настоящее время является быстро развивающейся математической областью. Основная цель диссертации - объединить некоммутативный анализ по группам и дробное исчисление.

В настоящее время функциональные и геометрические неравенства на группах Ли в настоящее время являются быстро развивающейся областью математики. Многие нелинейные дифференциальные уравнения задач механики и задач физики, для которых глобальная разрешимость задач доказывается с помощью функциональных неравенств. Это означает, что одним из наиболее важных инструментов для изучения УЧП является

функциональное неравенство. Например, многомерное неравенство Харди порядка демонстрирует следующее неравенство:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq \left(\frac{p}{n-p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx, \quad 1 < p < n, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

где $|\cdot|$ – Евклидово расстояние и постоянная $\left(\frac{p}{n-p}\right)^p$ является наилучшим. Это неравенство находит применение во многих областях математики, например, в спектральной теории. Также этим неравенством мы можем показать принцип неопределенности Гейзенберга-Паули, который имеет применение в квантовой теории. Во-первых, для групповых настроек Гарофало и Ланконелли получили неравенство Харди для группы Гейзенберга.

Целью диссертационной работы заключается в изучении дробных субэллиптических функциональных и геометрических неравенств на однородных группах, таких как неравенства Харди, Соболева, Харди-Соболева, Гальярдо-Ниренберга, Каффарелли-Кона-Ниренберга, Харди-Литтлвуда-Соболева и Штейна-Вейса. Также мы изучаем обратные неравенства. Мы изучаем обратное интегральное неравенство Харди на метрическом пространстве мер. Как следствие, мы показываем обратное интегральное неравенство Харди на однородных группах, гиперболическом пространстве и многообразиях Картана-Адамара. Затем мы покажем применение функциональных неравенств в нелинейных уравнений в частных производных на однородных группах. Кроме того, мы устанавливаем одномерные дробные функциональные неравенства для производных Капуто, Римана-Лиувилля и Адамара. Затем мы дадим некоторые приложения одномерных неравенств.

Задачи исследования:

- прямые функциональные неравенства;
- обратные функциональные неравенства;
- приложения этих неравенств к нелинейным УЧП;
- одномерные функциональные неравенства на интервале.

Объектом исследования является доказательством основных дробных функциональных неравенств на однородных группах Ли, а именно: Харди, Соболева, Харди-Соболева, Гальярдо-Ниренберга, Каффарелли-Кона-Ниренберга, Харди-Литтлвуда-Соболева и неравенств Штейна-Вейса, обратного интегрального неравенства Харди по метрике пространство мер, его следствие на однородных группах, гиперболическое пространство и многообразия Картана-Адамара, обратное уравнение Харди-Литтлвуда-Соболева, обратное уравнение Штейна-Вейса, улучшенные обратные неравенства Штейна-Вейсса на однородных группах Ли, его применение в

нелинейных уравнений в частных производных и одномерном функционале неравенства.

Методы научного исследования. Для исследования по этой докторской диссертации используются классические методы исчисления, дробного исчисления, теория однородных групп Ли, теория УЧП, а также новые идеи математических наук.

Научная новизна работы. В диссертационной работе были получены следующие новые результаты:

- *Прямые неравенства.* В этой главе для прямых неравенств мы получаем дробные неравенства Харди, Соболева, Харди-Соболева, Гальярдо-Ниренберга, Каффарелли-Кона-Ниренберга, логарифмические неравенства, неравенства Харди-Литтлвуда-Соболева и Штейна-Вейса на однородных группах Ли. Также получено целочисленное неравенство Соболева-Фолланда-Штейна на стратифицированных группах.

- *Обратные неравенства.* Для обратных неравенств мы докажем обратные интегральные неравенства Харди с параметрами $q < 0$, $p \in (0,1)$ и $-\infty < q \leq p < 0$. Также мы показываем обратные интегральные неравенства Харди на однородных группах Ли, гиперболическом пространстве и многообразиях Картана-Адамара с $q < 0$, $p \in (0,1)$. Как следствие, мы показываем обратные неравенства Харди-Литтлвуда-Соболева, Штейна-Вейсса и улучшенные версии неравенств Штейна-Вейсса для случаев $q < 0$, $p \in (0,1)$ и $-\infty < q \leq p < 0$. Кроме того, мы получили обратные неравенства Харди, L^p -Соболева и L^p -Каффарелли-Кона-Ниренберга с радиальной производной на однородных группах Ли.

- *Применение.* В этой главе мы покажем некоторые применения этих неравенств в линейных и нелинейных уравнений в частных производных на однородных группах. Во-первых, мы получаем неравенство Ляпунова для дробного уравнения и систем p -суб-лапласиана и показываем применение в спектральной теории. Также показано существование слабых решений некоторых нелинейных уравнений в частных производных на однородных группах Ли. Затем мы показываем результаты раздувания для уравнения теплопроводности с логарифмической нелинейностью и дробным подлапласианом на однородных группах Ли. Затем мы получаем результат разрушения для вязкоупругого уравнения на стратифицированных группах Ли. Затем мы получаем показатель Фудзиты и Като в уравнении (системе) тепла и волн Рокланда на градуированных группах Ли.

- *Приложение.* В этой главе мы рассмотрим одномерные функциональные неравенства на евклидовом случае. Установлены дробные неравенства Харди, типа Пуанкаре, типа Гальярдо-Ниренберга и

Каффарелли-Кона-Ниренберга для дифференциальных операторов дробного порядка в виде дробных производных Капуто, Римана-Лиувилля и Адамара. Также мы покажем применение этих неравенств. Кроме того, мы показываем неравенства типа Ляпунова и Хартмана-Винтнера для дробного уравнения в частных производных с условием Дирихле, даем применение этих неравенств для первого собственного значения и показываем неравенство типа де ла Валья типа Пуссена для дробной эллиптической краевой задачи.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Данное исследование носит в основном фундаментальный характер, вносит ценный вклад в развитие теории функционального анализа нильпотентных групп Ли и теории дифференциальных уравнений, а также способствует повышению имиджа Республики Казахстан в научном мире. Полученные результаты будут применены для решения различных задач теоретической физики.

Публикации. По теме диссертации было опубликовано 14 работ, в том числе 3 публикации в научных журналах, включенные в список, рекомендованный Комитетом по контролю образования и науки МОН РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 7 в База данных Thomson Reuters или база данных Scopus, 4 публикации в материалах международных конференций.

Результаты по теме диссертации были опубликованы в следующих работах:

Публикация в рейтинговом научном журнале

1 A. Kassymov, M. Ruzhansky and D. Suragan. Fractional logarithmic inequalities and blow-up results with logarithmic nonlinearity on homogeneous groups. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 27:7, 2020. (Scopus, Web of Science, Q1);

2 A. Kassymov, M. Ruzhansky and D. Suragan. Hardy-Littlewood-Sobolev and Stein-Weiss inequalities on homogeneous Lie groups. *Integral Transform. Spec. Funct.*, 30(8):643--655, 2019. (Scopus, Web of Science, Q2);

3 A. Kassymov and D. Suragan. Existence of solutions for p -sub-Laplacians with nonlinear sources on the Heisenberg group. *Complex Variables and Elliptic Equations*, dx.doi:10.1080/17476933.2020.1731737, 2020. (Scopus, Web of Science, Q2);

4 A. Kassymov, B. Torebek and N. Tokmagambetov. Nonexistence Results for the Hyperbolic-Type Equations on Graded Lie Groups. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, doi:10.1007/s40840-020-00919-6, 2020, (Scopus, Web of Science, Q2);

5 Bekbolat B., Kassymov A., Tokmagambetov N. Blow-up of Solutions of Nonlinear Heat Equation with Hypoelliptic Operators on Graded Lie Groups.

Complex Analysis and Operator Theory, 13(7):3347-3357, 2019. (Scopus, Web of Science, Q2);

6 A. Kassymov and D. Suragan. Fractional Hardy-Sobolev inequalities and existence results for fractional sub-Laplacians. Journal of Mathematical Sciences, to appear. (Scopus, Q3);

7 A. Kassymov and D. Suragan. Lyapunov-type inequalities for the fractional $\mathbb{H}^s$ -sub-Laplacian. Advances in Operator Theory, 1-18, doi:10.1007/s43036-019-00037-6, 2020. (Scopus, Web of Science);

ҚҚСОҢ

1 A. Kassymov and Suragan D. An analogue of the fractional Sobolev inequality on the homogenous Lie groups. Mathematical Journal, 18(1):99-110, 2018;

2 A. Kassymov and Suragan D. Reversed Hardy–Littlewood–Sobolev inequality on homogeneous Lie groups. Kazakh Mathematical Journal, 19(1):50-57, 2019;

3 A. Kassymov. Blow-up of solutions for nonlinear pseudo-parabolic Rockland equation on graded Lie groups. Kazakh Mathematical Journal, 19(3):89-100, 2019.

Публикации в материалах международных конференций

1 A. Kassymov. On the S-number inequalities of triangular cylinders for the heat operator. Traditional International April scientific conference in honor of the Science Day. -April 10, 2018 - Almaty. - P.109.

2 A. Kassymov, A. Kashkynbayev and Suragan D. Non-blow-up and blow-up results to heat equations with logarithmic nonlinearity on stratified groups. «Traditional International April math conference in honor Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan, dedicated to the 1150th anniversary of Abu Nasyr al-Farabi and 75th anniversary of the Institute of Mathematics and mathematical Modeling», p.45, 2020.

3 A. Kassymov, A. Kashkynbayev and Suragan D.. Blow-up results for viscoelastic wave equations with damping terms on stratified groups. «Traditional International April math conference in honor Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan, dedicated to the 1150th anniversary of Abu Nasyr al-Farabi and 75th anniversary of the Institute of Mathematics and mathematical Modeling», p.46, 2020.

4 A. Kassymov and Suragan D. Cordoba-Cordoba type inequality on homogenous Lie groups. Fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics. - September 6-9, 2018- North Cyprus- P. 109.

Структура и объем диссертации. Диссертация включает в себя титульный лист, содержание, введение, вступительные данные, 3 главы,

приложение, заключение и список литературы, состоящий из 129 названий. Общий объем диссертации составляет 205 страниц.

Основное содержание диссертации. Во введении отражено обоснование актуальности темы диссертации, цели, объекта, предмета, задач исследования, обоснования научной новизны работы, ее теоретической и практической значимости, научных принципов, подлежащих защите, количества доступных публикаций.

В главе 3 мы развиваем теорию дробных функциональных и геометрических неравенств на однородных группах Ли. Получены дробные неравенства Харди, Соболева, Гальярдо-Ниренберга, Каффарелли-Кона-Ниренберга на однородных группах Ли и их логарифмические дробные неравенства, что даже ново для евклидова случая. Для потенциала Рисса (или дробного интеграла) мы получаем неравенство Харди-Литтлвуда-Соболева на однородных группах Ли, что означает ограниченность оператора Рисса в пространствах $L^q - L^p$. Кроме того, мы получаем неравенство Штейна-Вейсса (или радиально взвешенное неравенство Харди-Литтлвуда-Соболева) для потенциала Рисса. Кроме того, мы показываем логарифмическое неравенство Соболева-Фолланда-Штейна целочисленного порядка на стратифицированных группах Ли.

В главе 4 мы изучаем вопрос об обратных функциональных неравенствах. Во-первых, мы начинаем изучать обратное интегральное неравенство Харди на метрическом пространстве мер. Отметим, что в работах Ружанки и Вермы авторы ввели полярное разложение на метрическое пространство мер, которое играет ключевую роль в их доказательстве. В этой главе мы получаем обратное интегральное неравенство Харди на метрическом пространстве мер с параметрами $p \in (0,1)$ и $q < 0$. В качестве следствия получаем интегральное обратное неравенство Харди на однородных группах Ли, гиперболическом пространстве и многообразии Картана-Адамара с параметрами $q < 0$ и $p \in (0,1)$. Также мы показываем интегральное обратное неравенство Харди на метрическом пространстве мер с параметрами $-\infty < q \leq p < 0$ и, как следствие, показываем обратное интегральное неравенство Харди на однородных группах Ли. Затем мы получаем обратные уравнения Харди-Литтлвуда-Соболева, Штейна-Вейсса и улучшенные неравенства Штейна-Вейсса на однородных группах Ли с параметрами $p \in (0,1)$ и $q < 0$. Кроме того, мы получаем обратный тип Харди-Литтлвуда-Соболева, типа Штейна-Вейсса и улучшенные неравенства типа Штейна-Вейсса с параметрами $-\infty < q \leq p < 0$, что даже ново для евклидовых настроек. Кроме того, мы получаем

обратные неравенства Харди, L^p -Соболева и L^p -Каффарелли-Кона-Ниренберга с радиальной производной на однородных группах Ли.

В главе 5 мы даем приложения функциональных неравенств в PDE. Во-первых, мы получаем неравенства Ляпунова для дробного p -суб-лапласова уравнения и систем на однородных группах Ли. В качестве приложения неравенства Ляпунова мы даем оценку снизу первого собственного значения дробного p -суб-лапласова уравнения и систем на однородных группах Ли. Затем мы покажем существование слабого решения для нелинейного уравнения с p -суб-лапласианом на гейзенберговской и стратифицированной группах. Также мы показываем существование слабого решения для нелинейного уравнения с дробным подлапласианом и потенциалом Харди на однородных группах Ли и кратность слабого решения с первым слоем потенциала Харди на гейзенберговских и стратифицированных группах. Затем мы обсуждаем результаты раздувания для уравнения теплопроводности с дробной суб-лапласовой и логарифмической нелинейностью на однородных группах Ли и для уравнения теплопроводности с суб-лапласовой и логарифмической нелинейностью на стратифицированной группе. Кроме того, мы показываем результаты раздувания для вязкоупругих уравнений с суб-лапласианом на стратифицированных группах, тепловые и волновые уравнения Рокленда на градуированных группах.

В приложении мы рассмотрим одномерные функциональные неравенства на евклидовом случае. Во-первых, мы получаем дробные неравенства типа Харди, Пуанкаре, типа Гальярдо-Ниренберга и Каффарелли-Кона-Ниренберга для дифференциальных операторов дробного порядка в виде дробных производных Капуто, Римана-Лиувилля и Адамара. Также мы покажем применение этих неравенств. Кроме того, мы показываем неравенства типа Ляпунова и Хартмана-Винтнера для дробного уравнения в частных производных с условием Дирихле, даем применение этих неравенств для первого собственного значения и показываем неравенство типа де Валье Пуссена для дробной эллиптической краевой задачи.